

MATEMATICĂ

clasa a XI-a

**BREVIAR TEORETIC. EXERCIȚII ȘI PROBLEME
PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE.
TESTE SUMATIVE**

**■ filiera tehnologică
toate calificările profesionale**

Consultant:

Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ



NICULESCU

| | |
|-----------------------------------|---|
| Capitolul I. Matrice | 8 |
|-----------------------------------|---|

| | |
|--|----|
| 1. Matrice. Adunarea și scăderea matricelor. | |
| Înmulțirea unei matrice cu un scalar | 8 |
| 2. Înmulțirea matricelor | 13 |
| Teste de evaluare | 19 |

| | |
|--|----|
| Capitolul II. Determinanții | 21 |
|--|----|

| | |
|---|----|
| 1. Determinantul unei matrice pătratice | 21 |
| 2. Proprietățile determinanților | 27 |
| 3. Aplicații ale determinanților în geometrie | 34 |
| Teste de evaluare | 39 |

| | |
|--|----|
| Capitolul III. Sisteme de ecuații liniare | 41 |
|--|----|

| | |
|---|----|
| 1. Matrice inversabilă în $M_n(\mathbb{R})$ și ecuații matriceale | 41 |
| 2. Sisteme liniare | 50 |
| Teste de evaluare | 62 |

Analiză matematică

| | |
|---|----|
| Capitolul I. Limite de funcții | 66 |
|---|----|

| | |
|---|-----|
| 1. Noțiuni elementare despre mulțimi de puncte pe dreapta reală – intervale, mărginire, vecinătăți | 66 |
| 2. Limita unei funcții într-un punct | 75 |
| 3. Limite remarcabile. Cazuri de nedeterminare | 85 |
| 4. Asimptote la graficul unei funcții | 94 |
| Teste de evaluare | 100 |

| | |
|---|-----|
| Capitolul II. Funcții continue | 101 |
|---|-----|

| | |
|---|-----|
| 1. Funcții continue într-un punct și pe o mulțime. Operații cu funcții continue | 101 |
| 2. Semnul unei funcții continue pe un interval de numere reale. Proprietatea lui Darboux | 108 |
| Teste de evaluare | 113 |

| | |
|--|------------|
| Capitolul III. Funcții derivabile..... | 114 |
| 1. Derivata unei funcții într-un punct. Funcții derivabile | 114 |
| 2. Operații cu funcții care admit derivată. Derivata de ordin 1 și 2. Regulile lui l'Hospital | 123 |
| Teste de evaluare | 131 |
| Capitolul IV. Studiul funcțiilor cu ajutorul derivatelor..... | 133 |
| 1. Rolul derivelei întâi în studiul monotoniei funcțiilor. Puncte de extrem | 133 |
| 2. Rolul derivelei a două în studiul funcțiilor | 142 |
| 3. Reprezentarea grafică a funcțiilor..... | 148 |
| Teste de evaluare | 153 |
| Teste sumative..... | 155 |

Răspunsuri

| | |
|--------------------------------|-----|
| <i>Algebră.....</i> | 166 |
| <i>Analiză matematică.....</i> | 181 |
| <i>Teste sumative</i> | 206 |

Capitolul I

MATRICE

1. Matrice. Adunarea și scăderea matricelor

Înmulțirea unei matrice cu un scalar

IMPORTANT!

- **Definiție**

O funcție $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$ se numește matrice cu m linii și n coloane (sau de tipul (m, n)) cu coeficienți în mulțimea \mathbb{C} .

$$A(i, j) = a_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n} \quad (a_{ij} \text{ se numesc elementele matricei}).$$

- **Matrice particulare**

1) O matrice de tipul $(1, n)$ se numește matrice linie: $A = (a_1 a_2 \dots a_n)$.

2) O matrice de tipul $(m, 1)$ se numește matrice coloană: $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$

3) O matrice de tipul (m, n) cu toate elementele nule se numește matricea zero, notată $O_{m,n}$.

4) Dacă $m = n$ matricea se numește pătratică de ordin n :

$$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \quad A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$$

$Tr(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ se numește urma matricei pătratice A .

5) Matrice unitate de ordinul n : $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$;

$$I_n = (\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}, \quad \sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă } i = j \\ 0 & \text{dacă } i \neq j \end{cases}$$

Respect pentru oameni și cărți

Exemplu: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

• Operații cu matrice

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$. Atunci

$$A + B = C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), C = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

• Proprietăți

P1: $(A + B) + C = A + (B + C)$, $(\forall) A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P2: $A + B = B + A$, $(\forall) A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P3: Există $0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A + 0 = 0 + A = A$, $(\forall) A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P4: Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ există $(-A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A + (-A) = (-A) + A = 0_{mn}$;

P5: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$, $(\forall) \alpha \in \mathbb{C}, A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P6: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$, $(\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$;

P7: Pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $Tr(A + B) = TrA + TrB$;

P8: $Tr(\alpha A) = \alpha TrA$.

Modele pentru rezolvarea problemelor și redactarea soluțiilor

1. Se consideră matricea $A_{(x)} = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$. Demonstrați că $A_{(x)} + A_{(y)} = A_{(x+y)}$.

Soluție:

$$A_{(x)} + A_{(y)} = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -y \\ -y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & -(x+y) \\ -(x+y) & x+y \end{pmatrix} = A_{(x+y)}.$$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 4 & 3z & 7 \\ u & -v & 2t \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -x & 2y & u \\ -v & 2z & -1 \end{pmatrix}$ și $C = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -2 \\ -16 & -11 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

Aflați $x, y, z, u, v, t \in \mathbb{R}$, dacă $A + B = C$.

Soluție:

Respect pentru oamenii și cărțile

$$A + B = \begin{pmatrix} x-5 & 0 & y-1 \\ 4-x & 3z+2y & 7+u \\ u-v & 2z-v & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Atunci } A + B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} x-5 & 0 & y-1 \\ 4-x & 3z+2y & 7+u \\ u-v & 2z-v & 2t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -2 \\ -16 & -11 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix} \text{ și obținem:}$$

$$x - 5 = 15 \Rightarrow x = 20, y - 1 = -2 \Rightarrow y = -1, 3z - 2 = -11 \Rightarrow z = -3, 7 + u = 9 \Rightarrow u = 2, 2 - v = 0 \Rightarrow v = 2, 2t - 1 = 1 \Rightarrow t = 1.$$

Deci $x = 20, y = -1, z = -3, u = 2, v = 2, t = 1$.3. Dacă ε este o soluție a ecuației $x^2 + x + 1 = 0$, să se calculeze

$$\sum_{k=1}^{3p} \begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \end{pmatrix}.$$

Soluție:

Avem:

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 - 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^3 = 1.$$

$$\sum_{k=1}^{3p} \begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \end{pmatrix} = \left(\underbrace{\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^3 + \dots + \varepsilon^{3p}}_c \quad \underbrace{\varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \dots + \varepsilon^{6p}}_a \quad \underbrace{\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \dots + \varepsilon^{9p}}_b \right)$$

$$a = \varepsilon \cdot \frac{\varepsilon^{3p} - 1}{\varepsilon - 1} = \varepsilon \cdot \frac{(\varepsilon^3)^p - 1}{\varepsilon - 1} = \varepsilon \cdot \frac{1 - 1}{\varepsilon - 1} = 0, b = \varepsilon^2 \cdot \frac{(\varepsilon^2)^{3p} - 1}{\varepsilon - 1} =$$

$$= \varepsilon^2 \cdot \frac{(\varepsilon^3)^{2p} - 1}{\varepsilon - 1} = \varepsilon^2 \cdot \frac{1 - 1}{\varepsilon^2 - 1} = 0, c = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{\text{de } 3p \text{ ori}} = 3p.$$

Rezultatul final al sumei este matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$4. \text{ Să se determine matricea } Y, \text{ dacă } 3Y + 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Soluție:

Euația matriceală este echivalentă cu: $3Y = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & -5 & 10 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$3Y = \begin{pmatrix} -18 & 6 & -9 \\ -15 & -9 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -18 & 6 & -9 \\ -15 & -9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. a) Determinați matricele X și $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă:

$$\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$$

b) Aflați $\text{Tr } X + \text{Tr } Y$.

Soluție:

a) Adunând cele două ecuații obținem:

$$3X = \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Introducem matricea X în prima ecuație a sistemului și obținem:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Deci } X = \begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) $\text{Tr } X + \text{Tr } Y = 5 + (-1) = 4$.

Exerciții și probleme pentru fixarea cunoștințelor

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}$. Determinați x, y, z, t, u, v astfel încât $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculați $A - B$.

3. Calculați: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Calculați: $B = 2 \begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine matricea X dacă: $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Să se determine matricea X dacă: $2X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Să se determine matricea Y dacă: $3Y + 5\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

Exerciții și probleme pentru aprofundarea cunoștințelor

1. Să se determine matricea X dacă: $-5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dacă are loc egalitatea:

$$3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2b \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} c & -2d \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Să se determine matricea X dacă: $2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2X = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Determinați matricele X și $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$

5. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ pentru care: $x\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4+y \\ z+2 & 4+t \end{pmatrix}$.

7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Aflați:

- a) $Tr(A)$; b) $Tr(2A)$; c) $Tr(\underbrace{A + A + A + \dots + A}_{\text{de 9 ori}})$.