PETRE SIMION VICTOR NICOLAE

MATEMATICĂ

clasa a XI-a

BREVIAR TEORETIC. EXERCIȚII ȘI PROBLEME PROPUSE ȘI REZOLVATE. TESTE DE EVALUARE. TESTE SUMATIVE

■ **filiera tehnologică**

toate calificările profesionale

Consultant:
Prof.univ.dr.mat.em. OCTAVIAN STĂNĂȘILĂ

NICULESCU

CUPRINS

Algebră

Analiză matematică

Răspunsuri

Capitolul I

MATRICE

1. Matrice. Adunarea şi scăderea matricelor

Înmulţirea unei matrice cu un scalar

IMPORTANT!

- **Definiţie**

O funcţie $A:\{1,2,...,m\}\times\{1,2,...,n\}\to\mathbb{C}$ se numeşte matrice cu m linii şi n coloane (sau de tipul (m,n)) cu coeficienţi în mulţimea $\mathbb{C}$.

$A(i,j)=a_{ij}$, $i=\overline{1,m}$ $j=\overline{1,n}$ (a_{ij} se numesc elementele matricei).

- **Matrice particulare**

1) O matrice de tipul $(1, n)$ se numeşte matrice linie: $A=(a_1a_2...a_n)$.

2) O matrice de tipul $(m,1)$ se numeşte matrice coloană: $A=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\...\\a_m\end{pmatrix}$

3) O matrice de tipul (m,n) cu toate elementele nule se numeşte matricea zero, notată $O_{m,n}$.

4) Dacă $m=n$ matricea se numeşte pătratică de ordin n:

$A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), A=(a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$.

$Tr(A)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$ se numeşte urma matricei pătratice A.

5) Matrice unitate de ordinul n: $I_n=\begin{pmatrix}1&0&...&0\\0&1&...&0\\0&0&...&1\end{pmatrix}$;

$I_n=(\sigma_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$, $\sigma_{ij}=\begin{cases}1 \text{ dacă } i=j\\0 \text{ dacă } i\neq j\end{cases}$.

Exemple: $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- **Operaţii cu matrice**

Fie $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$. Atunci

$A + B = C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C}), C = (c_{ij}), c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

- **Proprietăţi**

P1: $(A+B)+C = A+(B+C), (\forall) A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

P2: $A+B = B+A, (\forall) A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

P3: Există $0 \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+0 = 0+A = A, (\forall) A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

P4: Pentru orice matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ există $(-A) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ astfel încât $A+(-A)= =(-A)+A = 0_{mn};$

P5: $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B, (\forall) \alpha \in \mathbb{C}, A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

P6: $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A, (\forall) \alpha, \beta \in \mathbb{C}, A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C});$

P7: Pentru $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$: $Tr(A+B) = TrA + TrB;$

P8: $Tr(\alpha A) = \alpha TrA.$

Modele pentru rezolvarea problemelor şi redactarea soluţiilor

1. Se consideră matricea $A_{(x)} = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix}$. Demonstraţi că $A_{(x)} + A_{(y)} = A_{(x+y)}$.

Soluţie:

$$A_{(x)} + A_{(y)} = \begin{pmatrix} x & -x \\ -x & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & -y \\ -y & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & -(x+y) \\ -(x+y) & x+y \end{pmatrix} = A_{(x+y)}.$$

2. Fie $A = \begin{pmatrix} x & 0 & y \\ 4 & 3z & 7 \\ u & -v & 2t \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -x & 2y & u \\ -v & 2z & -1 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -2 \\ -16 & -11 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$.

Aflaţi $x, y, z, u, v, t \in \mathbb{R}$, dacă $A + B = C$.

Soluție:

$$A+B=\begin{pmatrix} x-5 & 0 & y-1 \\ 4-x & 3z+2y & 7+u \\ u-v & 2z-v & 2t-1 \end{pmatrix}.$$

Atunci $A+B=C \Rightarrow \begin{pmatrix} x-5 & 0 & y-1 \\ 4-x & 3z+2y & 7+u \\ u-v & 2z-v & 2t-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -2 \\ -16 & -11 & 9 \\ 0 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ și obținem:

$x-5=15 \Rightarrow x=20$, $y-1=-2 \Rightarrow y=-1$, $3z-2=-11 \Rightarrow z=-3$, $7+u=9 \Rightarrow u=2$, $2-v=0 \Rightarrow v=2$, $2t-1=1 \Rightarrow t=1$.

Deci $x=20$, $y=-1$, $z=-3$, $u=2$, $v=2$, $t=1$.

3. Dacă ε este o soluție a ecuației $x^2+x+1=0$, să se calculeze

$$\sum_{k=1}^{3p}\begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \end{pmatrix}.$$

Soluție:

Avem:

$\varepsilon^2+\varepsilon+1=0 \Rightarrow (\varepsilon-1)(\varepsilon^2+\varepsilon+1)=0 \Rightarrow \varepsilon^3-1=0 \Rightarrow \varepsilon^3=1.$

$$\sum_{k=1}^{3p}\begin{pmatrix} \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} & \varepsilon^{3k} \\ \varepsilon^{3k} & \varepsilon^k & \varepsilon^{2k} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} \underbrace{\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\ldots+\varepsilon^{3p}}_{a} & \underbrace{\varepsilon^2+\varepsilon^4+\varepsilon^6+\ldots+\varepsilon^{6p}}_{b} & \underbrace{\varepsilon^3+\varepsilon^6+\ldots+\varepsilon^{9p}}_{c} \\ c & a & b \end{pmatrix}$$

$$a=\varepsilon\cdot\frac{\varepsilon^{3p}-1}{\varepsilon-1}=\varepsilon\cdot\frac{(\varepsilon^3)^p-1}{\varepsilon-1}=\varepsilon\cdot\frac{1-1}{\varepsilon-1}=0,\ b=\varepsilon^2\cdot\frac{(\varepsilon^2)^{3p}-1}{\varepsilon-1}=$$

$$=\varepsilon^2\cdot\frac{(\varepsilon^3)^{2p}-1}{\varepsilon-1}=\varepsilon^2\cdot\frac{1-1}{\varepsilon^2-1}=0,\ c=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{\text{de } 3p \text{ ori}}=3p.$$

Rezultatul final al sumei este matricea $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3p \\ 3p & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Să se determine matricea Y, dacă $3Y+5\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

Soluție:

Euația matriceală este echivalentă cu: $3Y=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 20 & -5 & 10 \\ 15 & 5 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$3Y=\begin{pmatrix} -18 & 6 & -9 \\ -15 & -9 & 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Y=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -18 & 6 & -9 \\ -15 & -9 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} -6 & 2 & -3 \\ -5 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. a) Determinaţi matricele X şi $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă: $\begin{cases} X+Y=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 2X-Y=\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$.

b) Aflaţi $Tr\,X + Tr\,Y$.

Soluţie:

a) Adunând cele două ecuaţii obţinem:

$$3X=\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 7 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Introducem matricea X în prima ecuaţie a sistemului şi obţinem:

$$\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}+Y=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Y=\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Deci $X=\begin{pmatrix} 2 & \frac{7}{3} \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $Y=\begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3} \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $Tr\,X + Tr\,Y = 5 + (-1) = 4$.

Exerciţii şi probleme pentru fixarea cunoştinţelor

1. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} x & y & z \\ t & u & v \end{pmatrix}$. Determinaţi x, y, z, t, u, v astfel încât $A+B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. Fie $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculaţi $A-B$.

3. Calculaţi: $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Calculaţi: $B=2\begin{pmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}-3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -5 & 6 & 12 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine matricea X dacă: $2\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + 2 \cdot X = 4\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

7. Să se determine matricea X dacă: $2X + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

8. Să se determine matricea Y dacă: $3Y + 5\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 9 \end{pmatrix}$.

Exerciţii şi probleme pentru aprofundarea cunoştinţelor

1. Să se determine matricea X dacă: $-5\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ 15 & -1 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Să se determine $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, dacă are loc egalitatea:

$$3\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ a & 2b \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} c & -2d \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Să se determine matricea X dacă: $2\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} - 2X = 3\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

4. Determinați matricele X şi $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dacă: $\begin{cases} X + Y = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ 2X - Y = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \end{cases}$.

5. Să se determine $x, y \in \mathbb{R}$ pentru care $x\begin{pmatrix} 2 & x \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

6. Să se determine $x, y, z, t \in \mathbb{R}$ pentru care: $x\begin{pmatrix} x+1 & 2 \\ -1 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & x \\ 2x & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4+y \\ z+2 & 4+t \end{pmatrix}$.

7. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$. Aflaţi:

a) $Tr(A)$; b) $Tr(2A)$; c) $Tr\underbrace{(A + A + A + \ldots + A)}_{\text{de 9 ori}}$.